

**Департамент образования Ивановской области**

**ОГБПОУ «Плесский колледж бизнеса и туризма»**

**«Элементы высшей математики» ЕН 01**

**Методические указания по организации самостоятельной работы**

**для студентов очного отделения  
по специальности 38.02.07 «Банковское дело»**

Преподаватель: А.Е. Девятова

с. Северцево, 2015

## Содержание

|   |    |
|---|----|
| Введение.....   | 3  |
| 1.Тематический план.....  | 4  |
| 2.Содержание учебной дисциплины с вопросами для самоконтроля..... | 6  |
| 3.Рекомендуемая литература.....                                   | 15 |

## Введение

Программа учебной дисциплины «Элементы высшей математики» предназначена для реализации требований ФГОС к уровню подготовки выпускников по специальности 38.02.07 «Банковское дело».

Учебная дисциплина «Элементы высшей математики» относится к естественно-научным дисциплинам.

Целью изучения дисциплины является усвоение теоретических знаний основных математических методов решения прикладных задач в области профессиональной деятельности; усвоения основных понятий и методов математического анализа, дискретной математики, линейной алгебры, основ интегрального и дифференциального исчисления, приобретения умений решать прикладные задачи.

Программа учебной дисциплины «Элементы высшей математики» для очной формы обучения рассчитана на 60 часов, из них 40 часов – обязательная аудиторная учебная нагрузка. Остальные 20 часов предназначены для самостоятельного изучения студентами при консультативной помощи преподавателя.

Программа составлена в определенной логической последовательности.

В результате освоения учебной дисциплины студент *должен уметь*:

- решать системы линейных уравнений;
- производить действия над векторами, составлять уравнения прямых и определять их взаимное расположение;
- вычислять пределы функций;
- дифференцировать и интегрировать функции;
- моделировать и решать задачи линейного программирования;

В результате освоения учебной дисциплины студент *должен знать*:

- основные понятия линейной алгебры и аналитической геометрии;
- основные понятия и методы математического анализа;
- виды задач линейного программирования и алгоритм их моделирования;

При изучении дисциплины рекомендуется следующая последовательность:

1. Ознакомиться с содержанием методических указаний и практических заданий по каждой теме.
2. Подобрать рекомендуемую литературу, изучить ее и составить краткий конспект;
3. Дать ответы на вопросы самоконтроля.
4. Выполнить практические задания.

## Тематический план

| Курс, семестр,<br>разделы, темы                                  | Учебная нагрузка обучающихся (час.) |  |                                  |                          |                        |                         |  |
|--|-------------------------------------|--|----------------------------------|--------------------------|------------------------|-------------------------|--|
|  | Максимальная учебная<br>нагрузка    | Самостоятельная<br>работа обучающегося | Обязательная аудиторная нагрузка |                          |                        |                         |  |
|  |                                     |  | Всего<br>часов                   | в Т.Ч.                   |                        |                         |  |
|  |                                     |  |                                  | теоретические<br>занятия | лабораторные<br>работы | практические<br>занятия | курсовая работа<br>(проект) (для<br>СПО) |
| 1.Теория пределов  | 4                                   | -                                      | 4                                | 2                        |                        | 2                       |  |
| 1.1 Предел функции,<br>непрерывность<br>функции                  | 4                                   | -                                      | 4                                | 2                        |                        | 2                       |  |
| 2.Дифференциаль-<br>ное и интегральное<br>исчисление             | 20                                  | 6                                      | 14                               | 6                        |                        | 8                       |  |
| 2.1. Производная<br>функции                                      | 8                                   | 2                                      | 6                                | 2                        |                        | 4                       |  |
| 2.2. Неопределенный<br>интеграл                                  | 4                                   | -                                      | 4                                | 2                        |                        | 2                       |  |
| 2.3.Определенный<br>интеграл                                     | 8                                   | 4                                      | 4                                | 2                        |                        | 2                       |  |
| 3.Линейная алгебра<br>с элементами<br>аналитической<br>геометрии | 20                                  | 6                                      | 14                               | 6                        |                        | 8                       |  |
| 3.1.Матрицы,<br>определители                                     | 8                                   | 2                                      | 6                                | 2                        |                        | 4                       |  |
| 3.2.Решение систем<br>линейных уравнений                         | 6                                   | 2                                      | 4                                | 2                        |                        | 2                       |  |
| 3.3. Аналитическая<br>геометрия на<br>плоскости                  | 6                                   | 2                                      | 4                                | 2                        |                        | 2                       |  |
| 4.Линейное<br>программирование                                   | 16                                  | 8                                      | 8                                | 6                        |                        | 2                       |  |
| 4.1.Общая<br>постановка ЗЛП                                      | 4                                   | 2                                      | 2                                | 2                        |                        | -                       |  |
| 4.2.Решение ЗЛП<br>графическим<br>методом                        | 6                                   | 2                                      | 4                                | 2                        |                        | 2                       |  |
| 4.3.Решение ЗЛП<br>симплекс-методом                              | 6                                   | 4                                      | 2                                | 2                        |                        | -                       |  |
| Всего  | 60                                  | 20                                     | 40                               | 20                       |                        | 20                      |  |

**Таблица по организации самостоятельной работы  
студентов II курса по дисциплине «Элементы высшей математики»  
специальность «Банковское дело»**

| Раздел  | Кол-во часов | Вид работы  | Цель  | Контроль  |
|---|--------------|---|---|---|
| <b>1. Теория пределов</b>   | <b>-</b>     |   |   |   |
| <b>2. Дифференциальное и интегральное исчисление</b>  | <b>6</b>     |   |   |   |
| 2.1. Построение графиков функций  | 2            | Выполнение индивидуальных заданий<br>Решение практических задач   | Дополнительное изучение материала   | Проверка преподавателям индивидуальных заданий.     |
| 2.3. Применение определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур и объемов тел вращения. | 4            |   |   |   |
| <b>3. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии</b>                                       | <b>6</b>     |   |   |   |
| 3.1. Ранг матрицы   | 2            | Составление опорного конспекта<br>Написание сообщений             | Учить применять полученные знания на практике<br>Дополнительное изучение материала. | Защита сообщений<br><br>Проверка схем и конспектов. |
| 3.2. Применение СЛАУ при решении практических задач.  | 2            |   |   |   |
| 3.3. Различные виды уравнения плоскости в пространстве.   | 2            | Составление схемы   |   |   |
| <b>4. Линейное программирование</b>   | <b>8</b>     |   |   |   |
| 4.1 Экономическая интерпретация ЗЛП.  | 2            | Написание сообщений   | Дополнительное изучение материала.  | Проверка индивидуальных заданий.                    |
| 4.2 Решение практических задач.   | 2            | Решение задач   |   |   |
| 4.3 Решение задач линейного программирования симплекс-методом   | 4            | Решение индивидуальных задач при помощи информационных технологий |   |   |
| <b>Итого</b>  | <b>20</b>    |   |   |   |

## Содержание учебной дисциплины с вопросами для самоконтроля

### Раздел 1. Теория пределов

Правило Лопиталя для вычисления пределов;

Вопросы для самоконтроля

1. Понятие пределы функции в точке.
2. Основная теорема о пределах и ее следствия.
3. Вычисление предела функции в точке.
4. Вычисление предела функции на бесконечности.
5. I и II замечательные пределы.
6. Правило Лопиталя.

Практические задания.

Задание 1.

Вычислить предел функции:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x}+2}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x}$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x-3}$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+x+4}{14-x^2-x^3}$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+x-4}{14-x^2-6x^3}$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{30x^3+x+4}{14-8x^2-3x^3}$$

$$\text{з) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+x+4}{14-x^2-x^3}$$

$$\text{к) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+x-4}{14-x^2-6x^3}$$

$$\text{л) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{30x^3+x+4}{14-8x^2-3x^3}$$

### Раздел 2. Дифференциальное и интегральное исчисление

1. Понятие производной.
2. Основные правила дифференцирования.
3. Таблица производных.
4. Производная сложной функции.
5. Схема исследования функций.
6. Дифференциал функции
7. Производные высших порядков
8. Таблица основных формул интегрирования.
9. Метод подстановки.
10. Метод интегрирования по частям.
11. Алгоритм вычисления площади плоских фигур.
12. Вычисление объемов тел вращения
13. Вычисление дуги кривой.

Практические задания.

Задание 1:

Вычислить производную функции:

а)  $y = \frac{-5}{x^2} + 4x - 3$ ; б)  $y = 5x + \frac{6}{x^3} - 1$ ; в)  $y = \sin 2x + \sqrt{x^2 - 7}$ .

г)  $y = 3x^4 - 5\sin x + 4e^x + 2$ ; д)  $y = x^4 \cdot \ln x$ ; е)  $y = \frac{4}{x^7}$ ,

ж)  $y = (5x^7 - 3x \cdot \sqrt[3]{x^2 - 6})^4$

Задание 2:

Вычислить производную третьего порядка:

а)  $f(x) = e^x(x^2 + 1)$ , б)  $f(x) = 9x^4 + 3x^2 + 5x + \operatorname{tg} x$

Задание 3:

Вычислить дифференциал функции:

а)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$ ; б)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$ ;

в)  $f(x) = 4x^3 - x^2 + 2$  г)  $f(x) = 2x^2 + \operatorname{tg} x$ ;

д)  $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 5$ ; е)  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2 + x$ ;

ж)  $f(x) = e^x(x^3 + 1)$

Задание 4:

Вычислить определенный интеграл:

а)  $\int_1^4 \left( x + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) dx$ ;

б)  $\int_0^{-4} \frac{dx}{\sqrt{(1-2x)^3}}$

в)  $\int_0^1 x e^{-x} dx$ ;

г)  $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x dx}{\sin^2 x}$

д)  $\int_0^{\pi} e^x \cdot \sin x dx$ ;

е)  $\int_0^{\pi/2} e^x \cdot \cos x dx$ ;

Задание 5:

Вычислить длину дуги кривой:

а) Вычислить длину дуги параболы  $y = x^2$  от точки А(1;1) до точки В(2;4);

б) Вычислить длину дуги  $y = \sqrt{x^3}$ , абсциссы концов которой  $x=1$ ,  $x=4$ .

### Раздел 3. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии.

Матрицы; Определители; Системы линейных уравнений; Ранг матрицы.  
Применение систем линейных уравнений при решении прикладных задач

#### Вопросы для самоконтроля

1. Определители II и III порядка, их свойства.
2. Минор элемента определителя.
3. Алгебраическое дополнение элемента определителя.
4. Вычисление определителя разложением по строке.
5. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.
6. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
7. Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы.
8. Ранг матрицы.
9. Применение систем линейных уравнений при решении прикладных задач.
10. Различные виды уравнения плоскости в пространстве.

#### Практические задания

1. Вычислить определитель:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} ;$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Решить систему тремя способами:

- по формулам Крамера
- матричным методом;
- методом Гаусса.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x + y + z = 8. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + y - 3z = 0, \\ 3x + 2y + 2z = -1, \\ x - y + 5z = -2 \end{cases}$$

3. Составить систему уравнений и решить одним из методов:

1. Завод производит электронные приборы трех видов (прибор А, прибор В и прибор С), используя при сборке микросхемы трех видов (тип 1, тип 2, и тип 3). Расход микросхем и объем расхода сырья за один день заданы в таблице. Найти ежедневный объем выпуска каждого вида приборов.



| Вид сырья | Нормы расхода сырья на изготовление одного прибора, усл. ед. |          |          | Расход сырья за один день, усл. ед. |
|-----------|--|----------|----------|-------------------------------------|
|           | Прибор А   | Прибор В | Прибор С |                                     |
| Тип 1     | 2  | 5        | 1        | 500                                 |
| Тип 2     | 2  | 0        | 4        | 400                                 |
| Тип 3     | 2  | 1        | 1        | 400                                 |

2. Предприятие выпускает изделие трех наименований: А, В, С при этом используется сырьё трёх типов:  $S_1, S_2, S_3$ . Необходимые характеристики указаны в таблице. Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

| Вид сырья | Расход сырья по видам продукции, вес. ед. /изд. |   |   | Запас сырья, вес. ед. |
|-----------|---|---|---|-----------------------|
|           | А   | В | С |                       |
| $S_1$     | 2   | 2 | 1 | 6                     |
| $S_2$     | 2   | 1 | 1 | 5                     |
| $S_3$     | 1   | 1 | 2 | 9                     |

3. Автомобильный завод специализируется по выпуску изделий трех видов: А, В, С, при этом используется сырьё трёх типов:  $S_1, S_2, S_3$ . Необходимые характеристики указаны в таблице. Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

| Вид сырья | Расход сырья по видам продукции, вес. ед. /изд. |   |   | Запас сырья, вес. ед. |
|-----------|---|---|---|-----------------------|
|           | А   | В | С |                       |
| $S_1$     | 6   | 4 | 5 | 2400                  |
| $S_2$     | 4   | 3 | 1 | 1450                  |
| $S_3$     | 5   | 2 | 3 | 1550                  |

4. Предприятие выпускает изделие трех наименований: стулья, табуретки и столы, при этом используется сырьё трёх типов:  $S_1, S_2, S_3$ . Нормы расхода каждого из них на изготовление одного изделия и объем расхода сырья за один день заданы в таблице.

| Вид сырья | Нормы расхода сырья на изготовление одного изделия, усл. ед. |      |           | Расход сырья за один день, усл. ед. |
|-----------|--|------|-----------|-------------------------------------|
|           | стул   | стол | табуретка |                                     |
| $S_1$     | 10   | 3    | 4         | 270                                 |
| $S_2$     | 4  | 1    | 1         | 90                                  |
| $S_3$     | 6  | 2    | 2         | 160                                 |

Найти ежедневный объем выпуска каждого вида продукции

### Пример решения:

Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трёх видов:  $s_1, s_2, s_3$ . Необходимые характеристики указаны в таблице.

| Вид сырья | Нормы расхода сырья на изготовление одного вида продукции, усл. ед. |           |         | Расход сырья за один день, усл. ед. |
|-----------|---|-----------|---------|-------------------------------------|
|           | сапог   | кроссовок | ботинок |                                     |
| $S_1$     | 5   | 3         | 4       | 2700                                |
| $S_2$     | 2   | 1         | 1       | 900                                 |
| $S_3$     | 3   | 2         | 2       | 1600                                |

Найти ежедневный объем выпуска каждого вида продукции.

**Решение:** Пусть ежедневно фабрика выпускает  $x_1$  – единиц продукции первого вида,  $x_2$  – единиц продукции второго вида,  $x_3$  – единиц продукции третьего вида. Тогда в соответствии с расходом сырья каждого вида имеем систему.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 900 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1600 \end{cases}$$

Решаем систему линейных уравнений любым способом. Решим данную систему, например, методом Гаусса. Составим матрицу из коэффициентов стоящих перед неизвестными и из свободных членов.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & 2700 \\ 2 & 1 & 1 & 900 \\ 3 & 2 & 2 & 1600 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & 2700 \\ 0 & -1 & -3 & -900 \\ 0 & 1 & -2 & -100 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & 2700 \\ 0 & -1 & -3 & -900 \\ 0 & 0 & -5 & -1000 \end{array} \right)$$

Вернемся к системе

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700 \\ -x_2 - 3x_3 = -900 \\ -5x_3 = -1000 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 200 \\ x_2 = 300 \\ x_3 = 200 \end{cases}$$

Т.е. фабрика выпускает 200- единиц продукции первого вида, 300- единиц продукции второго вида и 200- единиц продукции третьего вида.

### 4.Вычисление ранга матрицы.

Изучив теоритический материал, составьте опорный конспект по данной теме.

Ранг матрицы – это наивысший порядок минора матрицы, отличного от нуля. Ранг матрицы  $A$  обозначают как  $Rank(A)$ . Можно также встретить обозначения  $Rg(A)$  или  $Rang(A)$ .

Из определений ранга матрицы и минора матрицы можно заключить, что

ранг нулевой матрицы равен нулю, а ранг ненулевой матрицы не меньше единицы.

Пример:

Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: дана квадратная матрица «четыре на четыре», её ранг не больше четырёх.

Поскольку есть ненулевые элементы, следовательно, ранг не менее единицы.

Проверку миноров 2-го порядка начинаем с так называемого *углового*

минора  $\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & 0 & 5 \\ \boxed{2} & \boxed{4} & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0, \text{ поэтому переходим к минору } \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & \boxed{0} & 5 \\ \boxed{2} & 4 & \boxed{-1} & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1 \neq 0, \text{ значит, ранг матрицы не менее двух. Что было бы нужно сделать, если бы и этот минор оказался нулевым? В этом случае}$$

рассматриваем минор  $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & \boxed{5} \\ \boxed{2} & 4 & -1 & \boxed{0} \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , и если он тоже равен нулю, рассматриваем дальше:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & \boxed{0} & 5 \\ 2 & \boxed{4} & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 0 & \boxed{5} \\ 2 & \boxed{4} & -1 & \boxed{0} \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{0} & 5 \\ 2 & 4 & \boxed{-1} & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

При необходимости (когда получились одни нули), следует продолжить перебор миноров по аналогичной схеме у:

1-й и 3-й строк;

1-й и 4-й строк;

2-й и 4-й строк;

3-й и 4-й строк – до тех пор, пока не повстречается минор, отличный от нуля.

Если все миноры 2-го порядка оказались нулевыми, то  $\text{Ранг} = 1$ .

В данном случае уже на втором шаге обнаружен «хороший» минор, и теперь переходим к рассмотрению миноров третьего порядка. К

младшему минору  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ , который будет входить во все рассматриваемые миноры высших порядков добавляем:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & \boxed{0} & 5 \\ \boxed{2} & 4 & \boxed{-1} & 0 \\ \boxed{-2} & -4 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{5} \\ \boxed{2} & 4 & \boxed{-1} & 0 \\ \boxed{-2} & -4 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверяем:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 4 + 4 - 4 = 0$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (2 - 2) = 0$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{5} \\ \boxed{2} & 4 & \boxed{-1} & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 - 0 + 2 \cdot (4 - 4) = -2 \neq 0$$

, значит, ранг

матрицы не менее трёх. Если бы этот минор оказался равным нулю, то следовало бы проверять дальше. Других миноров 3-го порядка, которые

содержат младший ненулевой минор  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$  – нет, то  $\text{Ранг} = 2$ .

Миноров 3-го порядка на самом деле больше, и рассматриваемый метод в данном случае позволяет сократить вычисления, максимум, до четырёх определителей. Успех нас поджидал на 3-м шаге, и «хороший» ненулевой

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix};$$

минор

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Добавляем столбцы, которые должны входить во все миноры высших порядков. В данном случае это единственный минор 4-го порядка, совпадающий с определителем матрицы:

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(2-я и 3-я строки пропорциональны – см. свойства определителя)

Вывод: максимальный порядок ненулевого минора равен трём, значит, Ранг = 3.

Самостоятельно:

Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 11 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

## Раздел 4. Линейное программирование

Задачи линейного программирования. Методы решения ЗЛП.

Вопросы для самоконтроля:

1. Общая постановка ЗЛП;
2. Решение ЗЛП графическим методом;
3. Решение ЗЛП симплекс-методом

Изучив теоритический материал, напишите сообщение по данной теме.

Симплекс-метод является универсальным методом, которым можно решить любую задачу линейного программирования. В отличие от симплекс-метода, графический метод пригоден для системы ограничений с двумя переменными.

Прежде чем разбираться, в чём состоит идея симплекс-метода, совершим необходимый экскурс в терминологию.

Всякое неотрицательное решение системы ограничений называется допустимым решением.

Совместная система  $m$  линейных уравнений с  $n$  переменными ( $m < n$ ) имеет бесчисленное множество всевозможных решений, в том числе и допустимых (не имеющих отрицательных компонент).

Допустимым базисным решением является решение, содержащее  $m$  неотрицательных **основных (базисных)** переменных (компонент) и  $n - m$  **неосновных**. (небазисных, или **свободных**) переменных. Неосновные переменные в базисном решении равны нулю, основные же переменные, как правило, отличны от нуля, то есть являются положительными числами. Любые  $m$  переменных системы  $m$  линейных уравнений с  $n$  переменными называются **основными**, если определитель из коэффициентов при них отличен от нуля. Тогда остальные  $n - m$  переменных называются **неосновными** (или **свободными**).

Идея симплекс-метода состоит в следующем. Используя систему ограничений в виде системы  $m$  линейных уравнений с  $n$  переменными ( $m < n$ ), находят её любое базисное решение, по возможности наиболее простое. Если первое же найденное базисное решение оказалось допустимым, то его проверяют на оптимальность. Если оно не оптимально, то переходят к другому допустимому базисному решению. Симплекс-метод гарантирует, что при этом новом решении линейная форма если и не достигнет оптимума (максимума или минимума), то приблизится к нему. С новым допустимым базисным решением поступают так же, пока не найдено решение, которое является оптимальным.

**Пример.** Найти максимум функции  $F = x_1 + 2x_2$  при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Решение.

Вводим добавочные неотрицательные переменные  $x_3, x_4, x_5, x_6$  и сводим данную систему неравенств к эквивалентной ей системе уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2 \\ x_2 + x_6 = 6 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 6) \end{cases}$$

Введённые добавочные переменные принимаем за основные, так как в этом случае базисное решение системы легко находится. Тогда  $x_1$  и  $x_2$  - неосновные переменные.

Используя информационные технологии получаем ответ : базисное решение  $(8; 6; 2; 10; 0; 0)$  является оптимальным, а максимум линейной формы  $F_{\max} = 20$

### Практические задания.

Решить следующие ЗЛП симплексным методом:

|   |  |   |
|---|--|---|
| 1. $F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max,$<br>$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leq 15, \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 11. \end{cases}$                     | 2. $F = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$<br>$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_1 \leq 3, \\ x_2 \leq 1. \end{cases}$ | 3. $F = 2x_1 - 5x_2 \rightarrow \min,$<br>$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 4. \end{cases}$  |
| 4. $F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$<br>$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ 2x_1 - x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + x_2 \leq 24. \end{cases}$ | 5. $F = x_1 + x_2 \rightarrow \max,$<br>$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 20, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30. \end{cases}$      | 6. $F = 2x_1 - x_2 \rightarrow \min,$<br>$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leq 15, \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 11. \end{cases}$ |

### Рекомендуемая литература

#### Основные источники (ОИ):

| № п/п | Наименование                       | Автор                           | Издательство, год издания |
|-------|------------------------------------|---------------------------------|---------------------------|
| ОИ 1  | Элементы высшей математики         | В.П. Григорьев                  | Академия, 2008            |
| ОИ 2  | Сборник задач по высшей математике | В.П. Григорьев                  | Академия, 2014            |
| ОИ 3  | Математика                         | Н.В. Богомолов                  | М., 2004 г.               |
| ОИ 4  | Математика                         | С.Г. Григорьев<br>С.В. Задулина | М., 2008 г.               |
| ОИ 5  | Математика для техникумов          | И.И. Валуце                     | М., 1990 г.               |

#### Дополнительные источники (ДИ):

| № п/п | Наименование  | Автор                             | Издательство, год издания      |
|-------|---|-----------------------------------|--------------------------------|
| ДИ 1  | Математика (книги 1 и 2 )   | Ю.М. Колягин                      | М., 2003 г.                    |
| ДИ 2  | Основы статистики с элементами теории вероятностей для экономистов: | Л.Ю. Ниворожкина<br>З.А. Морозова | Ростов на Дону: Феникс 2001 г. |

|      |   |                 |                  |
|------|---|-----------------|------------------|
|      | руководство для решения задач                     |                 |                  |
| ДИ 3 | Введение в дискретную математику. Учебное пособие | С.В. Яблонский  | М., 2002 г.      |
| ДИ 4 | Математика  | В.Т. Омельченко | Феникс , 2005 г. |
| ДИ 5 | Краткий курс лекций по высшей математике          |                 |                  |

Интернет-ресурсы:

<http://school-collection.edu.ru> - Электронный учебник «Математика , XXI век».

<http://fcior.edu.ru> - информационные, тренировочные и контрольные материалы.

[www.school-collection.edu.ru](http://www.school-collection.edu.ru) - Единая коллекции Цифровых образовательных ресурсов.